

Untersuchung der Höhenabhängigkeit
von Temperatur und Dichte im
Knudsen-Gas im thermischen
Gleichgewicht

Forschungsarbeit
Angefertigt in der Zeit von Januar 1996 bis Januar 1997
Vorgelegt von Rolf Freitag, Universität Bremen

15. Januar 1997

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Hauptteil	3
2.1	Kinetische Gas-Theorie des Knudsen-Gases	3
2.1.1	Die Höhenabhängigkeit der Geschwindigkeitswahrscheinlichkeitsdichte	3
2.1.2	Die Knudsen-Gas-Dichte	6
2.1.2.1	Berechnung der Dichte für eine Wurfparabel	6
2.1.2.2	Berechnung der Knudsen-Gas-Dichte	6
2.1.2.3	Mögliche Messung der Knudsen-Gas-Dichte	8
2.1.3	Die Knudsen-Gas-Temperatur	9
2.1.3.1	Berechnung der Knudsen-Gas-Temperatur	10
2.1.3.2	Mögliche Messung der Knudsen-Gas-Temperatur	12
2.2	Die Höhenabhängigkeit der Temperatur-Strahlung nach der allgemeinen Relativitätstheorie	14
3	Messungen am Modell-System	17
3.0.1	Bestimmung der Höhenabhängigkeit der Dichte im einatomigen Gas durch Monte-Carlo-Simulation mit Stößen	17
3.0.2	Bestimmung der Höhenabhängigkeit der Temperatur im einatomigen Gas durch Monte-Carlo-Simulation mit Stößen	17
4	Zusammenfassung und Ausblick	18
	Literatur	21

1 Einleitung

In einer sehr dünnen Atmosphäre (Knudsen-Gas ¹) ist die Wechselwirkungsenergie (=potentielle Energie) zwischen den Teilsystemen Planet und Knudsen-Gas von gleicher Größenordnung wie die thermische Energie des Knudsen-Gases und, da sich die Moleküle im Knudsen-Gas praktisch nur auf Wurfparabeln bewegen, ist die Atmosphäre nicht in unabhängige Teilsysteme zerlegbar.

Eine Konsequenz hieraus ist, daß das Knudsen-Gas keine maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung besitzt, denn wenn man z. B. die Geschwindigkeitsverteilung der Gasatome mißt, die senkrecht vom Boden starten, also senkrecht in einem Detektor in der Höhe h ankommen, so ist deren Geschwindigkeitsquadrat durch den freien Fall verringert um $2 \cdot g \cdot h$. Hierdurch ist die Geschwindigkeitsverteilung zu niedrigeren Geschwindigkeiten verschoben und zwar nichtthermisch, d. h. sie ist durch den freien Fall keine maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung mehr. Hinzu kommt durch die Verschiebung zu kleineren Geschwindigkeiten auch eine niedrigere Gas-Temperatur, da die Temperatur proportional dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat ist.

In der vorliegenden Arbeit wird deshalb zunächst die Höhenabhängigkeit der Geschwindigkeitswahrscheinlichkeitsdichte des Knudsen-Gases auch für andere Winkel berechnet. Hieraus ergeben sich dann, durch Integration über den Phasenraum, sowohl die Dichte als auch die Temperatur in der Höhe h . Die Ergebnisse werden anschließend mit den Ergebnissen von Monte-Carlo-Simulationen verglichen.

Der Einfachheit halber wird meist nur ein Knudsen-Gas betrachtet, das aus separaten Atomen besteht, denn für Knudsen-Gase aus Molekülen ergibt sich nichts wesentlich neues.

¹D. h. die Gas-Atome stoßen mit den Kammer-Wänden, inklusive Boden und Decke, viel häufiger als gegeneinander.

2 Hauptteil

2.1 Kinetische Gas-Theorie des Knudsen-Gases

2.1.1 Die Höhenabhängigkeit der Geschwindigkeitswahrscheinlichkeitsdichte

Der Einfachheit halber wird ein einatomiges Knudsen-Gas in einer würfelförmigen Kammer der Kantenlänge a in einem homogenen Kraftfeld mit der für alle Moleküle gleichen Beschleunigung g betrachtet (s. Abb.1).

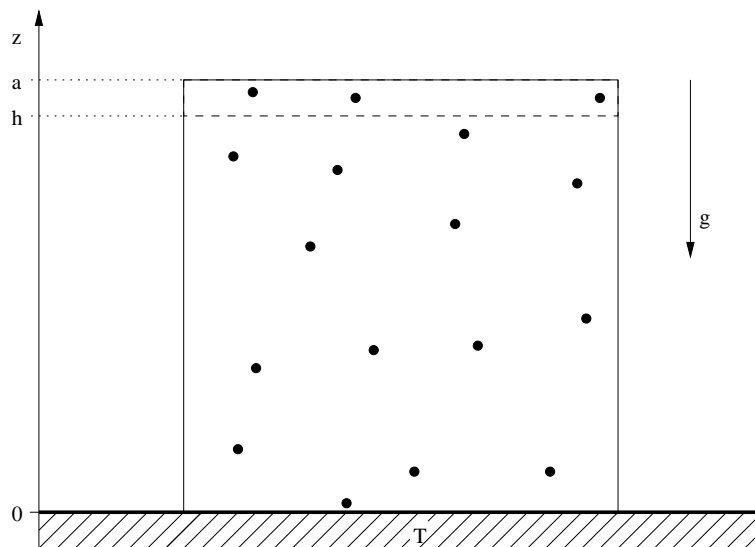


Abb. 1: Knudsen-Gas in einer würfelförmigen Kammer

Die vertikalen Wände und die Decke sind nicht wärmeleitend und der Boden hat durch das unter der Kammer liegende Wärme-Reservoir die Temperatur T . Der Boden und die Decke reflektieren die auftreffenden Gas-Atome diffus, d. h. winkelunabhängig. Die vertikalen Wände reflektieren die auftreffenden Gas-Atome spiegelnd (elastisch) und haben dadurch keinen Einfluß auf die Temperatur- und Dichte-Verteilung in dem Gas.

Der Boden und die nach außen isolierte Decke der Kammer befinden sich daher im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht mit dem Gas, haben also die Temperatur, die das Gas dort jeweils hat.

Dieses Modell ist realistisch, da beispielsweise Hg-Atome von Glaswänden diffus und von glatten Steinsalzoberflächen spiegelnd reflektiert werden [Heise-63].

Die Gasatome bewegen sich zwischen Boden und Decke nur auf Wurfparabeln. Deshalb hat ein vom Boden mit der Geschwindigkeit v_0 gestartetes Atom in der Höhe h die Geschwindigkeit $v = \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot h}$.

Aufgelöst nach der Geschwindigkeit am Boden erhält man $v_0 = \sqrt{v^2 + 2 \cdot g \cdot h}$. Für ein Gas, das am Boden ($h=0$) die maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung besitzt, folgt hieraus eine durch den freien Fall der Gasatome modifizierte Geschwindigkeitsverteilung in der Höhe h :

$$\varphi(v, h) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2 \cdot k \cdot T} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot (v^2 + 2 \cdot g \cdot h) \cdot e^{-\frac{(v^2 + 2 \cdot g \cdot h) \cdot m}{2 \cdot k \cdot T}} \frac{dv_0}{dv} \quad (1)$$

wobei der letzte Faktor, die Funktionaldeterminante von v , gleich $2 \cdot v \cdot 1/(2 \cdot \sqrt{v^2 + 2 \cdot g \cdot h})$ ist.

Diese ist aber noch nicht die Geschwindigkeitswahrscheinlichkeitsdichte in der Höhe h , denn es fehlen noch die Winkel- und volle Höhenabhängigkeit sowie die Normierung.

Im allgemeinen Fall des schiefen Wurfs muß noch berücksichtigt werden, daß nur Moleküle mit²

$$v_0 \geq \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{\cos(\theta)} \quad (2)$$

die Höhe h erreichen können. Dies erreicht man mit dem Faktor $\Theta \left(\frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{\cos(\theta)} \right)$.

Hierdurch wird die Geschwindigkeitswahrscheinlichkeitsdichte in der Höhe h zunächst zu:

$$\varphi_{\theta}(v, h) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2 \cdot k \cdot T} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot (v^2 + 2 \cdot g \cdot h) \cdot e^{-\frac{(v^2 + 2 \cdot g \cdot h) \cdot m}{2 \cdot k \cdot T}} \cdot \Theta \left(v - \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{\cos^2(\theta)} - 2 \cdot g \cdot h} \right) \cdot \frac{v}{\sqrt{v^2 + 2 \cdot g \cdot h}} \quad (3)$$

Die Heaviside-Funktion kann noch weiter zu $\Theta \left(v - \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \cdot \tan(\theta) \right)$ vereinfacht werden und taucht in den folgenden Integralen nur als untere Integrationsgrenze auf.

Durch Normierung erhält man schließlich die normierte Geschwindigkeitswahrscheinlichkeitsdichte in der Höhe h :

$$\frac{\varphi_{\theta}(v, h)}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \varphi_{\theta}(v, h) \cdot \sin(\theta) dv d\theta d\varphi} \equiv \varphi_{\theta}(v, h)_N \quad (4)$$

Bei der Integration über die geographische Breite wurde berücksichtigt, daß es sich um eine Integration in Kugelkoordinaten handelt und daher die Funktionaldeterminante gleich $\sin(\theta)$ ist. Allgemein kommt hier noch die Winkelabhängigkeit der vom Boden startenden Gasatome hinzu.

² θ =geographische Breite, Winkel der Wurfparabel-Tangente am Boden zur Vertikalen; φ ist die geographische Länge.

Durch die Verschiebung zu niedrigeren Geschwindigkeiten und die Theta-Funktion ergibt sich also eine ganz andere Geschwindigkeitswahrscheinlichkeitsdichte als die maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung.

Welche Konsequenzen dies hat, wird in den nächsten Kapiteln untersucht.

2.1.2 Die Knudsen-Gas-Dichte

2.1.2.1 Berechnung der Dichte für eine Wurfparabel

Die vertikale Wahrscheinlichkeits-Dichte von einem Atom auf einer Wurfparabel mit der maximalen Höhe M ist gleich der Zeit, die es in einer Höhe zwischen h und $h+dz$ verbringt, also

$$\frac{dt(h)}{dz} = \frac{1}{v_z(h)} = \frac{1}{\sqrt{2g(M-h)}} \quad (5)$$

Diese Dichte hat die Dimension s/m. Die Teilchendichte ergibt sich hieraus durch Multiplikation mit s .

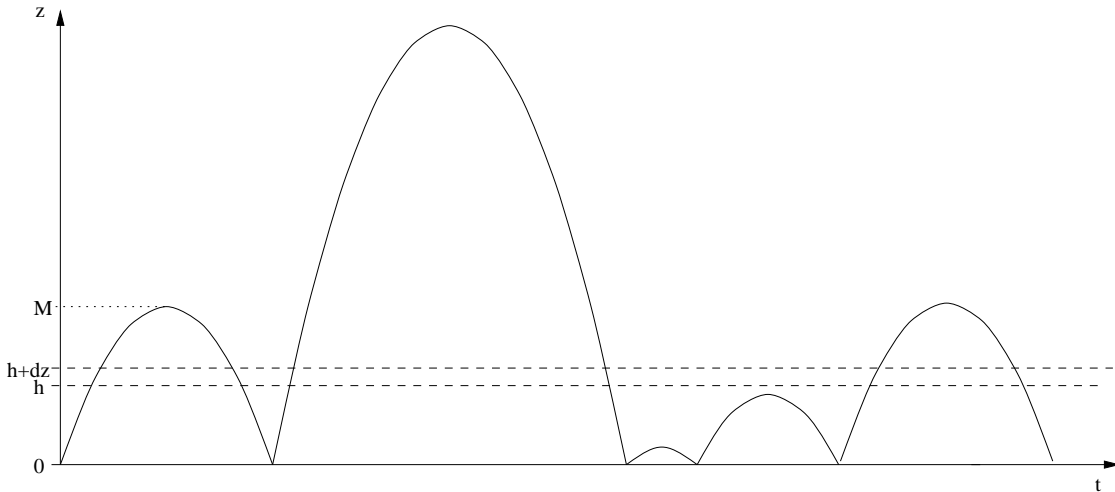


Abb. 2: Raum-Zeit-Diagramm zur Gasdichte in der Höhe h .

Hierbei ist die maximale Höhe

$$M = \frac{v_{0,z}^2}{2 \cdot g} = \frac{v_0^2 \cdot \cos(\theta)^2}{2 \cdot g} \quad (6)$$

Bei dieser Höhe hat die Dichte eine Singularität, die verschwindet, wenn man die heisenbergsche Unschärfe berücksichtigt oder nur endliche Volumina betrachtet. In x - und y -Richtung gilt gleiches, aber mit konstanter Geschwindigkeit, folglich konstanter Dichte, und ist daher trivial.

2.1.2.2 Berechnung der Knudsen-Gas-Dichte

Die Knudsen-Gas-Dichte ergibt sich durch Integration über die Wurfparabeln, auf denen sich die Atome im Knudsen-Gas bewegen. Da die Dichte für eine Wurfparabel im vorigen Kapitel berechnet wurde, bleibt noch die normierte Integration über alle Wurfparabeln (=Integration über den Phasenraum).

In einem Ensemble von Wurfparabeln und im thermischen Gleichgewicht ist der Beitrag einer Wurfparabel proportional der Wurfparabel-Dichte (Gl. 5) und deren Entstehungs-Wahrscheinlichkeit (nach der maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung).

Die Gas-Dichte ist also das Integral über die Phasenraumwahrscheinlichkeitsdichte $\varrho(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \varphi_\theta(v, z)_N$ mal der Wahrscheinlichkeitsdichte in der Höhe $z=h$. Nach der Gleichung 5 und der maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung (Gl. 13 mit $v = v(h = 0) = v_0$, da am Boden gestartet wird) erhält man also für die Dichte:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2 \cdot k \cdot T} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\pi/2} \int_{\sqrt{2 \cdot g \cdot h \cdot \tan(\theta)}}^{\infty} v_0^2 \cdot e^{-\frac{v_0^2 \cdot m}{2 \cdot k \cdot T}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot g \cdot (M - h)}} \cdot \sin(\theta) \cdot dv_0 \cdot d\theta \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2 \cdot k \cdot T} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \int_0^{\pi/2} \int_{\sqrt{2 \cdot g \cdot h \cdot \tan(\theta)}}^{\infty} (v^2 + 2 \cdot g \cdot h) \cdot e^{-\frac{(v^2 + 2 \cdot g \cdot h) \cdot m}{2 \cdot k \cdot T}} \\ & \quad \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot g \cdot (M - h)}} \frac{v}{\sqrt{v^2 + 2 \cdot g \cdot h}} \cdot \sin(\theta) \cdot dv \cdot d\theta \quad (7) \end{aligned}$$

Da der Integrand unabhängig von φ ist und nur die relative Dichte interessiert, wurden der Einfachheit halber sowohl die Integration über φ als auch die Normierung weggelassen.

Die Substitution

$$\frac{(v^2 + 2 \cdot g \cdot h) \cdot \cos(\theta)^2}{2g} = M \quad (8)$$

vereinfacht Gleichung 7 zu:

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2 \cdot k \cdot T} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \int_h^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{2} \cdot g^{3/2} \cdot M \cdot e^{-\frac{M \cdot g \cdot m}{k \cdot T \cdot \cos(\theta)^2}}}{\cos(\theta)^4 \cdot \sqrt{M - h}} \sin(\theta) \cdot dM \cdot d\theta \quad (9)$$

Das Ergebnis der Rechnung ist die relative vertikale Dichte:

$$\varrho(h) = e^{-\frac{m \cdot g \cdot h}{k \cdot T}} - \frac{1}{2} Ei \left(-\frac{m \cdot g \cdot h}{k \cdot T} \right) \quad (10)$$

Hierin ist Ei die Integraleponential-Funktion. Hierdurch ist die Abweichung der Dichte von der barometrischen Höhenformel auch bei geringen Höhen sehr deutlich, denn sie hat bei $h = 0$ m eine logarithmische Singularität.

Diese Singularität verschwindet, wenn man die van der-Waals-Wechselwirkung zwischen den Gas-Atomen und dem Boden berücksichtigt, denn auf den Wurfparabeln, die nahezu parallel zum Boden verlaufen (d. h. $\theta \approx \frac{\pi}{2}$) ist die van der-Waals-Kraft größer als $m \cdot g$, so daß es für die vorausgesetzten Wurfparabeln einen Maximal-Winkel θ_{max} von etwas weniger als $\pi/2$ gibt. Eine endliche Oberflächen-Rauhigkeit des Bodens wirkt sich ebenfalls so aus. Festzuhalten bleibt aber, dass trotzdem die Dichte im Knudsen-Gas schneller abfällt, als nach der barometrischen Höhenformel zu erwarten wäre.

Hieraus folgt auch, dass die mittlere potentielle Energie eines Knudsen-Gas-Atoms kleiner als $\frac{kT}{2}$ ist. Dies ergibt sich auch schon aus dem Energiesatz, denn auf den Wurfparabeln ist die Summe aus kinetischer Energie in vertikaler Richtung und die potentielle Energie im Mittel gleich $\frac{kT}{2}$. Da aber die beiden Energien größer als null sind, sind beide zwangsläufig kleiner als $\frac{kT}{2}$ (Dreiecks-Ungleichung). Da der Freiheitsgrad Höhe z nur linear und nicht quadratisch in die Hamilton-Funktion eingeht, ist dies nicht im Widerspruch zum Gleichverteilungssatz (der ohnehin nur in der klassischen statistischen Mechanik gilt).

2.1.2.3 Mögliche Messung der Knudsen-Gas-Dichte

Die Dichte kann direkt nur mit der Messung der Anzahl der Atome in einem Volumen in der Höhe h bestimmt werden. Da aber das Knudsen-Gas aufgrund der geringen Dichte nur sehr schwach Licht, Elektronen-Strahlen usw. streut, ist es mit Streu- oder Absorptions-Messungen kaum möglich, die Dichte zu messen. Daher ist es für eine Messung der Dichte zweckmässig, die Strahlung von einem stark radioaktiven Knudsen-Gas, beispielsweise Radon, in Abhängigkeit von der Höhe h zu messen, denn die Aktivität ist proportional der Dichte.

2.1.3 Die Knudsen-Gas-Temperatur

Die Temperatur eines einatomigen Knudsen-Gases ist nach der kinetischen Gas-Theorie die mittlere kinetische Energie der gegen das Thermometer stoßenden Gas-Atome mal $1/2k$, also ([Reif-87]):

$$T = \frac{m \cdot \overline{v^2}}{4 \cdot k} \quad (11)$$

Bei mehratomigen Knudsen-Gasen müssen noch die Vibrations- und Rotations-Freiheitsgrade berücksichtigt werden.

Wird die Temperatur nicht aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat eines Gasstroms sondern eines Ensemble ermittelt, so ist die Temperatur [Kuch-89]:

$$T = \frac{m \cdot \overline{v^2}}{3 \cdot k} \quad (12)$$

Es ergibt sich hierbei ein Unterschied von $3/4$, der dadurch entsteht, daß die Gasstomdichte gleich Gasdichte * Geschwindigkeit (=v) ist. Hierdurch ist die Geschwindigkeitsverteilung des Gasstroms, der gegen ein Thermometer stößt, die maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung mal v (und einer Normierungs-Konstanten [Miller-55]).

Da praktisch alle Gas-Temperaturmessverfahren nur das mittlere Geschwindigkeitsquadrat der gegen ein Thermometer stoßenden Gasatome messen, wird im Folgenden nur davon ausgegangen, also nur die erste der beiden Formeln verwendet.

2.1.3.1 Berechnung der Knudsen-Gas-Temperatur

Die Knudsen-Gas-Temperatur ergibt sich durch Integration über die Wurfparabeln, auf denen sich die Atome im Knudsen-Gas bewegen. Hierbei ist jeweils in Gleichung 11 für das mittlere Geschwindigkeits-Quadrat das Geschwindigkeits-Quadrat der Wurfparabel in der Höhe h einzusetzen.

In einem Ensemble von Wurfparabeln und im thermischen Gleichgewicht ist der Beitrag einer Wurfparabel proportional deren Entstehungs-Wahrscheinlichkeit (nach der maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung).

Somit bleibt noch die normierte Integration über alle Wurfparabeln (=Integration über den Phasenraum).

Hierbei ist zu berücksichtigen, dass die Temperatur nicht einfach eine Eigenschaft des Ensembles ist, sondern eine Eigenschaft der vom Boden gegen das Thermometer stoßenden Gas-Atome, also des Gas-Flusses, der das Thermometer trifft. Deshalb ist hier statt der einfachen die modifizierte maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung zu verwenden, also statt

$$\varphi(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2 \cdot k \cdot T} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{v^2 \cdot m}{2 \cdot k \cdot T}} \quad (13)$$

ist

$$\varphi_m(v) = 2 \left(\frac{m}{k \cdot T} \right)^2 \cdot v^3 \cdot e^{-\frac{v^2 \cdot m}{2 \cdot k \cdot T}} \quad (14)$$

zu verwenden [Miller-55].

Der Grund dafür, dass also die Atome zwar am Boden die maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung haben, aber der vom Boden emittierte Gasstrom die modifizierte maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung hat, ist das die Stomdichte gleich Dichte * Geschwindigkeit ($= v_0$) ist (siehe auch [Reif-87]).

Hierdurch enthält die modifizierte maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung, verglichen mit der einfachen maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung, zusätzlich den Faktor v und, wegen der Normierung, einen anderen Vorfaktor.

Damit ist die Gas-Temperatur ist also das Integral über die Phasenraumwahrscheinlichkeitsdichte $\varrho_m(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \varphi_{\theta, m}(v, z)_N$ (nach Gl. 4 und 14) mal der Einzel-Temperatur in der Höhe $z=h$ (Gl. 11), also:

$$T(h) = \frac{m \cdot \overline{v^2}}{4 \cdot k} = \frac{m}{4 \cdot k} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{\sqrt{2 \cdot g \cdot h \cdot \tan(\theta)}}^{\infty} v^2 \cdot \varphi_{\theta, m}(v, h)_N \cdot \sin(\theta) \cdot dv \cdot d\theta \cdot d\varphi \quad (15)$$

Die Substitution

$$\frac{(v^2 + 2 \cdot g \cdot h) \cos(\theta)^2}{2g} = M \quad (16)$$

vereinfacht Gleichung 15 zu:

$$\frac{m \int_h^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{(2 \cdot M)^2 \cdot g^3 \cdot e^{-\frac{M \cdot m \cdot g}{k \cdot T \cdot \cos(\theta)^2}}}{\cos(\theta)^6} \cdot \sin(\theta) \cdot dM \cdot d\theta}{4k \int_h^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{2 \cdot M \cdot g^2 \cdot e^{-\frac{M \cdot m \cdot g}{k \cdot T \cdot \cos(\theta)^2}}}{\cos(\theta)^4} \cdot \sin(\theta) \cdot dM \cdot d\theta} = \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h}{4 \cdot k} \quad (17)$$

Das Ergebnis der Rechnung ist:

$$T(h) = \frac{T}{4} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{m \cdot g \cdot h \cdot k \cdot T \cdot \pi} \cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{m \cdot g \cdot h}{k \cdot T}}\right) e^{\frac{m \cdot g \cdot h}{k \cdot T}} - 8 \cdot k \cdot T - 2 \cdot m \cdot g \cdot h}{\sqrt{m \cdot g \cdot h \cdot k \cdot T \cdot \pi} \cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{m \cdot g \cdot h}{k \cdot T}}\right) e^{\frac{m \cdot g \cdot h}{k \cdot T}} - 2 \cdot k \cdot T - \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h}{4 \cdot k}} \quad (18)$$

Dieser Temperatur-Verteilung in einem Xenon-Knudsen-Gas bei einer Boden-Temperatur von 293 K zeigt Abb. 3.

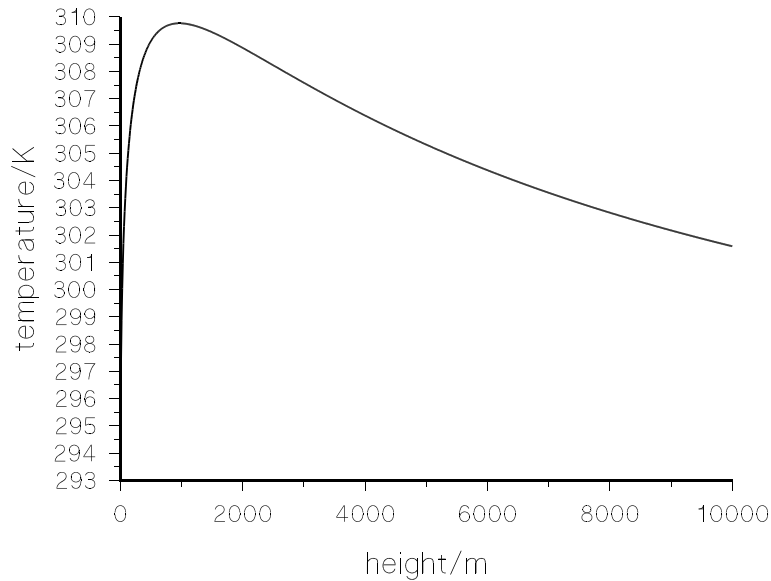


Abb. 3: Die Temperatur in Kelvin von Xenon-Knudsen-Gas auf der Erde bei einer Boden-Temperatur von 293 K über die Höhe h in m aufgetragen.

Da die Parameter m , g und h alle nur multiplikativ in die Gleichung eingehen, ergibt sich für alle einatomigen Gase qualitativ derselbe Kurvenverlauf; insbesondere ist die Höhe des Maximums für eine gegebene Boden-Temperatur T immer dieselbe und der Grenzwert für $m \cdot g \cdot h$ gegen unendlich ist T .

Anzumerken bleibt noch, daß hier zwei gegenteilige Effekte auftreten:

Der erste Effekt ist, daß nur die schnellen Atome mit $v_0 \geq \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{\cos(\theta)}$ die Decke erreichen, also nur heißes Gas.

Der zweite Effekt ist, daß durch die Schwerkraft die Gas-Atome auf dem Weg zur Decke langsamer werden und damit an der Decke kälter als am Boden sind.

Insgesamt erreicht also heißes abgekühltes Gas die Decke, so daß ohne die obige genaue Rechnung nicht klar ist, ob die Decke im thermischen Gleichgewicht kälter oder wärmer als der Boden ist.

Durch das Liouville-Theorem ist bekannt, daß das Phasenraumvolumen des Gases, das vom Boden aufsteigt und die Decke erreicht, konstant ist. Da dieses Gas die Decke mit geringerer Teilchen-Dichte erreicht, folgt aus dem Liouville-Theorem eine höhere Impuls-Dichte dieses Gases an der Decke, aber da der Impuls durch den Aufstieg verringert wurde und zudem nur der relativ energiereiche Teil des Gases die Decke erreicht, hilft dies nicht einmal bei der Abschätzung, ob die Decke im thermischen Gleichgewicht wärmer oder kälter als der Boden ist.

Die beiden gegenteiligen Effekte erklären aber, wieso die Temperatur zunächst ansteigt um nach einem Maximum wieder abzufallen.

2.1.3.2 Mögliche Messung der Knudsen-Gas-Temperatur

Da die Wärmeleitfähigkeit des Knudsen-Gases sehr gering ist, muß ein Versuchsaufbau nach Abb. 4 vor allem gegen äußere Temperaturgradienten sehr gut isoliert werden und außerdem müssen in der Decke und im Boden hochgenaue Temperatur-Sensoren verwendet werden, die einen Leistungsverbrauch von maximal $1 \mu\text{W}$ haben, damit die Sensoren nicht nur ihre Eigenerwärmung messen. Deshalb wurden hier in Abb. 4 Temperatur-Meßquarze an der Boden- und der Decken-Platte eingezeichnet. Die Resonanzfrequenz dieser Quarze ist proportional der Temperatur. Außerdem sollten Boden und Decke einen kleinen Emissionsgrad haben (z. B. durch glatte und vergoldete Oberflächen), da sonst die Wärmeleitung durch thermische Strahlung stärker werden kann als die Wärmeleitung durch das Knudsen-Gas. In dem Versuchsaufbau wurden die Wände an Boden- und Decken-Platte weggelassen, da eine Verunreinigung des Feinvakuums von ca. 1Pa am einfachsten durch einen sehr kleinen Edelgasstrom verhindert werden kann.

Die Wärmeleitungsleistung zwischen zwei parallelen Platten mit der Grundfläche a ist im Knudsen-Gas [Heise-63]:

$$P_{therm} = \frac{a \cdot n \cdot m \cdot \bar{c}}{8} (\bar{c}_1^2 - \bar{c}_2^2) \quad (19)$$

Durch Einsetzen der Temperaturen T und $T(h)$ sowie der mittleren freien Weglänge $\lambda = 1/(\sqrt{2} \cdot n \cdot \pi \cdot d^2)$ nach [Ber-74] erhält man also:

$$P_{therm} = \frac{3 \cdot a \cdot k^{1.5} \cdot \sqrt{T(h) + T}}{8 \cdot \sqrt{2} \cdot m \cdot \pi \cdot \lambda \cdot d^2} (T(h) - T) \quad (20)$$

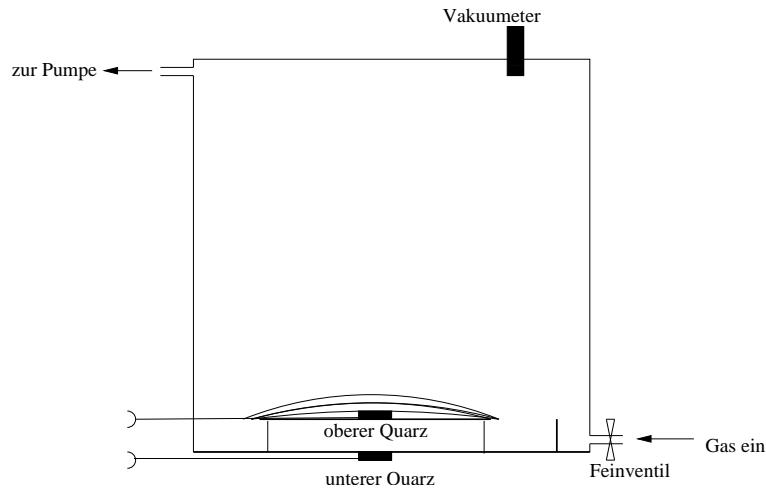


Abb. 4: Aufbau zur Messung der Knudsen-Gas-Temperatur.

Hierin ist d der Atom-Durchmesser und p_{therm} ist die Wärmeleistung, mit welcher der Boden eine gleich warme Decke aufheizt.

Beispielsweise liefert Xenon bei $h = 1$ cm, $\lambda = 2$ cm, $T = 293$ K, $a = 1$ m² und $g = 9,81$ m/s² nur $P_{therm} = 5,1$ μ W. Durch diese kleine Leistung kann sich die berechnete Temperaturdifferenz $T(h) - T$ von 0,149 K zwischen Boden- und Decke erst in einigen Minuten einstellen.

Die Deckenplatte ist deshalb durch mehrere Lagen Aluminium-Folie und Glasseide-Gewebe (sogenannte Superisolation, s. [Kohlrausch-86]) nach oben isoliert und steht auf drei bis vier kleinen und schlecht wärmeleitenden Stützen (z. B. 0,4 mm-Edelstahl-Kanülen).

Die Temperaturmessung erfolgt durch das Messen der Frequenz der beiden Oszillatoren, an welche die Quarze angeschlossen sind. Zur Erhöhung der Temperatur-Auflösung ist es sinnvoll die beiden Frequenzen mit einer Referenzfrequenz zu mischen und nur die Differenzfrequenzen zu messen. Da ein Frequenzzähler nur den Betrag der Differenzfrequenzen anzeigt, muß die Referenz-Frequenz aber immer etwas kleiner oder größer als die beiden Quarz-Frequenzen sein. Ansonsten würde man nur Beträge von Temperaturdifferenzen und nicht Temperaturdifferenzen messen.

2.2 Die Höhenabhängigkeit der Temperatur-Strahlung nach der allgemeinen Relativitätstheorie

Da der Streuquerschnitt für die Photon-Photon-Streuung bekanntlich vernachlässigbar klein ist, ist auch das Photonen-Gas ein Knudsen-Gas im weiteren Sinn.

Deshalb erhält man für die Energieflüsse zwischen zwei horizontalen Ebenen, mit dem Emissionsgrad ε , im homogenen Gravitationsfeld, durch die thermische Strahlung das Energiefluß-Diagramm in Abb. 5

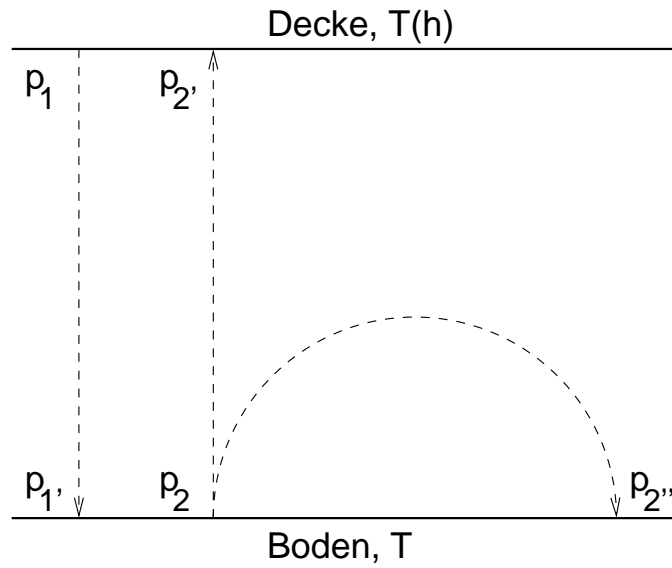


Abb. 5: Die Energie-Flüsse durch thermische Strahlung zwischen zwei parallelen Ebenen im homogenen Gravitationsfeld.

Die Photonen bewegen sich auf Nullgeodäten [Stephani-91]

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = -\Gamma_{ab}^\mu \frac{dx^a}{d\lambda} \frac{dx^b}{d\lambda} \quad (21)$$

mit

$$g_{\theta\beta} \frac{dx^\theta}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (22)$$

Diese sind im Gravitationsfeld eines kugelförmigen Sterns nahezu Hyperbeln [Duschek-65], folglich im homogenen Gravitationsfeld nahezu Wurfparabeln, und weisen, im Gegensatz zu den Wurfparabeln von Atomen, keine Energie-Dispersion auf. Für die erste Näherung wird deshalb im Folgenden mit Wurfparabel (mit $v=c$) gerechnet.

Durch die fehlende Energie-Dispersion erreichen, unabhängig von der Wellenlänge, vom Boden nur die Photonen die Decke, für die gilt $v_z = c \cdot \cos \Theta \geq$

$\sqrt{2gh}$, also für diejenigen, bei denen der Winkel zwischen der Wurfparabeltangente am Boden und der Vertikalen kleiner als

$$\arccos \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{c^2}} \quad (23)$$

ist.

Der Boden strahlt je Flächeneinheit mit der Leistungsdichte

$$p_2 = \sigma \cdot \varepsilon \cdot T^4 \quad (24)$$

Die Decke strahlt analog mit der Leistungsdichte

$$p_1 = \sigma \cdot \varepsilon \cdot T(h)^4 \quad (25)$$

Um die Rechnungen zu vereinfachen und nicht noch Mehrfachreflexionen berücksichtigen zu müssen, ist ab hier ε von Boden und Decke gleich eins.

Dadurch, daß nicht alle vom Boden abgestrahlten Photonen die Decke erreichen, kehrt ein Teil der vom Boden abgestrahlten Leistungsdichte,

$$p_{2''} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\arccos \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{c^2}}}^{\pi/2} p_2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) d\theta d\varphi = 2 \int_{\arccos \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{c^2}}}^{\pi/2} \sigma \cdot T^4 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) d\theta \quad (26)$$

direkt zum Boden zurück. Hierdurch kommt weniger Leistungsdichte an der Decke an.

Der Faktor $\sin(\theta)$ ist die Funktionaldeterminante in Kugelkoordinaten und der Faktor $2 \cdot \cos(\theta)$ ist die Lichtstärkeverteilung (gemäß dem 2. Lambertschen Kosinusetz).

Die vom Boden mit einer Leistungsdichte $p_2 - p_{2''}$ abgestrahlten Photonen erreichen die Decke mit einer Rotverschiebung von

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2 \cdot g \cdot h}{c^2}}} = \frac{1}{q} \quad (27)$$

Die Photonen-Energie ist daher an der Decke $1/q$ -tel der Photonen-Energie am Boden. Die Leistungsdichte an der Decke wird daher allein durch die Rotverschiebung auf $1/q$ -tel reduziert.

Diese Rotverschiebung ist beispielsweise als Rotverschiebung der Spektrallinien von Sternen bekannt [Ber-78].

Hierdurch ist die Strahlung des Bodens an der Decke zudem nicht mehr thermisch, also nicht gemäß der Planckschen Strahlungsformel.

Neben der Rotverschiebung ist auch die Zeitdilatation zu berücksichtigen, denn bekanntlich geht eine Uhr auf einem Berg geht schneller als eine im Tal. Die Zeitdilatation ist an der Decke um den Faktor

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2 \cdot g \cdot h}{c^2}}} = \frac{1}{q} \quad (28)$$

kleiner als am Boden. Die Anzahl der Photonen je Zeiteinheit, welche die Decke erreichen, ist daher nur an der Decke nur $1/q$ -tel der Anzahl der Photonen, die je Zeiteinheit vom Boden zur Decke starten. Die Leistungsdichte an der Decke wird daher allein durch die Zeitdilatation auf $1/q$ -tel reduziert.

Es gibt also insgesamt drei Effekte, die schon einzeln bewirken, daß weniger Leistungsdichte (als $\sigma \cdot T^4$) die Decke erreicht. Damit ist klar, dass die Decke im thermischen Gleichgewicht kälter ist als der Boden und es bleibt noch die Berechnung der Decken-Temperatur über die Bilanzgleichung für die Decke.

Es ergibt sich folgende Bilanz-Gleichung für die Decke:

$$p_1 = p_2' \quad (29)$$

also

$$\frac{2}{q^2} \int_0^{\arccos \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{c^2}}} \sigma \cdot T^4 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) d\theta = \sigma \cdot T(h)^4 \quad (30)$$

Nach Einsetzen von q und Auflösen nach $T(h)$ erhält man:

$$T(h) = T \cdot \sqrt[4]{\frac{2}{1 + \frac{2 \cdot g \cdot h}{c^2}} \int_0^{\arccos \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{c^2}}} \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) d\theta} \quad (31)$$

Für $T = 293 \text{ K}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ und $h=1 \text{ m}$ ergibt sich eine Temperaturdifferenz von nur $1,6 \cdot 10^{-14} \text{ K}$.

Der berechnete Effekt ist also auf der Erde praktisch unmeßbar klein, aber auf Neutronen-Stern-Oberflächen bewirkt er eine Erwärmung allein schon durch die kosmische Hintergrundstrahlung, die um so stärker ist, je näher die Sternoberfläche dem Schwarzschild-Radius kommt.

Zudem ist bei der Temperaturmessung an kompakten Sternen zu berücksichtigen, dass deren Strahlung durch die Zeitdilatation, die Rotverschiebung und die auf den Stern zurückfallenden Photonen nichtthermisch ist und dies um so stärker, je dichter die Sternoberfläche am Schwarzschild-Radius ist.

3 Messungen am Modell-System

3.0.1 Bestimmung der Höhenabhängigkeit der Dichte im einatomigen Gas durch Monte-Carlo-Simulation mit Stößen

Hauptsächlich zur Überprüfung der berechneten Knudsen-Gas-Dichte wurde die Dichte auch mittels Monte-Carlo-Simulation mit elastischen Stößen von Kugeln ermittelt. Zudem wurde die Dichte für den Fall untersucht, in dem die Stöße zwischen den Gas-Atomen nicht mehr vernachlässigbar sind.

Das Ergebnis der Simulationen ist eine Bestätigung von Formel 10 für das Knudsen-Gas.

Für Gase mit häufigen Stößen zwischen den Gasatomen ergibt die Simulation eine Dichte, die sich mit zunehmender Stoß-Anzahl der barometrischen Höhenformel annähert.

3.0.2 Bestimmung der Höhenabhängigkeit der Temperatur im einatomigen Gas durch Monte-Carlo-Simulation mit Stößen

Hauptsächlich zur Überprüfung der berechneten Knudsen-Gas-Temperatur wurde die Dichte auch mittels Monte-Carlo-Simulation mit elastischen Stößen von Kugeln ermittelt. Zudem wurde die Temperatur für den Fall untersucht, in dem die Stöße zwischen den Gas-Atomen nicht mehr vernachlässigbar sind.

Das Ergebnis der Simulationen ist eine Bestätigung von Formel 18 für das Knudsen-Gas.

Für Gase mit häufigen Stößen zwischen den Gasatomen ergibt die Simulation eine Temperatur, die sich mit zunehmender Stoß-Anzahl der Boden-Temperatur annähert.

Da die Gas-Wärmeleitfähigkeit bei kleinen Drücken proportional der Gas-Dichte und bei mittleren bis hohen Drücken konstant ist, gibt es deshalb ein Maximum der thermische Leistung des Gases (Wärmefluß vom Boden zur Decke mal $(T(h) - T)$) bei gleicher Boden- und Decken-Temperatur oder konstanter kleiner Temperaturdifferenz. Wie beim Radiometereffekt [Heise-63] ist der Effekt (Wärmeleitungsleistung im Gleichgewicht) maximal, wenn die mittlere freie Weglänge ungefähr gleich dem Abstand h von Boden- und Decken-Platte ist.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Wie die analytischen Rechnungen und auch die Simulationen zeigen, bewirkt ein Schwerfeld in einem Knudsen-Gas im thermischen Gleichgewicht eine stärker als exponentiell mit der Höhe abnehmende Dichte und eine höhenabhängige Temperatur.

Dies ist theoretisch nichts außergewöhnliches, da ein Knudsen-Gas im Schwerfeld nicht in unabhängige Teilsysteme zerlegbar ist und daher nicht mit kanonischen Gesamtheiten beschrieben werden kann (siehe [Brenig-92] S. 10).

Praktisch sind diese Ergebnisse aber außergewöhnlich, denn die Zerlegbarkeit in unabhängige Teilsysteme ist eine notwendige Voraussetzung für die Additivität der Teil-Energien und -Entropien und damit eine der notwendigen Voraussetzungen für das gibbsche Postulat und den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik (siehe [Brenig-92] Kapitel 10.2).

Aus diesem Grund sind die Ergebnisse dieser Arbeit, beispielsweise die höhenabhängige Temperatur im Knudsen-Gas, nicht im Widerspruch zum zweiten Hauptsatz, sondern sie zeigen nur, daß bei fehlenden Voraussetzungen Vereinfachungen wie die Beschreibung mit kanonischen Gesamtheiten oder dem zweiten Hauptsatz bei nicht separablen Systemen im allgemeinen nicht anwendbar sind.

Wichtig ist die bei den Berechnungen vorausgesetzte isotrope Emission der Gas-Atome vom Boden, denn im allgemeinen emittiert der Boden komplizierter, mit einer richtungsabhängigen Intensität. Theoretisch ist von einer rauhen Oberfläche zu erwarten, dass sie nach dem zweiten Lambertschen Kosinusetz emittiert, also mit kosinusförmiger Intensität und richtungsunabhängiger Stromdichte, so wie es in dieser Arbeit in den Rechnungen mit dem Photonengas steht. Dies wird auch in guter Näherung beobachtet, beispielsweise bei Stickstoff-Molekülstrahlen, die auf Metall- oder Glas-Oberflächen treffen [Hur-57]. Allerdings gilt dies nur in guter Näherung und nicht exakt. Zudem gibt es auch deutliche Abweichungen hiervon, beispielsweise auf Kristall-Oberflächen, da sich dort die Interferenz der Materie-Wellen (=Gas-Atome) bemerkbar macht [Lüth-93].

Fügt man diese kosinusförmige Richtungsabhängigkeit in die Formeln zur Berechnung der Dichte und der Temperatur im Knudsen-Gas ein, so ergeben sie dieselben Resultate wie für dichtes Gas, also eine exponentiell mit der Höhe abnehmende Dichte und eine höhenunabhängige Gas-Temperatur. Da die Rechnungen mit dem Photonengas diesen Faktor schon enthalten, ändert sich dort nichts.

Da in dichten Gasen die Atome nach dem zweiten Lambertschen Kosinusetz gegen eine Wand stoßen und auch der Gasaustausch zwischen verschiedenen Gas-Schichten nach dem zweiten Lambertschen Kosinusetz erfolgt [Reif-87], waren diese Ergebnisse zu vermuten gewesen.

Festzuhalten bleibt aber, daß durch einen Boden, der nicht exakt nach dem zweiten Lambertschen Kosinusetz emittiert, im Knudsen-Gas darüber die Temperatur höhenabhängig ist und daß die Dichte nicht exponentiell abnimmt. Dasselbe

gilt auch für ein nicht homogenes Beschleunigungsfeld, also auch für das Beispiel mit einer dünnen Planeten-Atmosphäre, die sich genau genommen nicht in einem homogenen sondern kugelsymmetrischen Feld befindet.

Durch diese beiden Effekte sind aber nur geringe Abweichungen von einer exponentiell mit der Höhe abnehmenden Dichte und einer höhenunabhängigen Gas-Temperatur zu erwarten.

Bei den Rechnungen und Simulationen ist der Einfachheit halber bisher nur eine einteilige ebene und zum Boden parallele Decke vorausgesetzt worden.

Mit anderen Voraussetzungen aber, also beispielsweise eine mehrteilige Decke, bestehend aus konvexen und konkaven Flächen, kann man die Winkelverteilung der gegen einen Decken-Teil stoßenden Atome allein durch die Form des genutzten Decken-Teils selektieren, da die Geschwindigkeitsverteilung (Gl. 4 bzw. $\varphi_{\theta,m}(v, z)_N$ nach Gl. 4 und 14) ja sowohl winkel- als auch höhenabhängig ist. Ein Beispiel hierfür ist eine von der Decke herabhängende Kugel, die aufgrund ihrer Form die Atome vom Boden nahezu isotrop, also ohne den aus dem zweiten Lambertschen Kosinusetz folgenden Kosinus-Faktor empfängt, selbst wenn der Boden nach dem zweiten Lambertschen Kosinusetz emittiert.

Dies wird auch durch Simulationen bestätigt; d. h. für eine Kugel im Knudsen-Gas über einem nach dem zweiten Lambertschen Kosinusetz emittierenden Boden, ergibt sich eine Temperatur nach Gleichung 18.

Theoretisch können also die berechneten und auch durch Simulationen bestätigten Temperaturdifferenzen problemlos zur Umwandlung von Umgebungswärme in andere Energieformen wie elektrischen Strom verwendet werden. Die berechneten kleinen Wärmeleitungsleistungen und relativ kleinen Temperaturdifferenzen im Knudsen-Gas und Photonen-Gas können aber technisch kaum verwendet werden, da man auch mit größeren Beschleunigungen, z. B. in Ultrazentrifugen, nur geringe Leistungsdichten von wenigen Watt pro Kubikmeter erreichen kann.

Ein Ausweg sind hier andere Gase wie z. B. Elektronen-Gase in Halbleitern und auch eine Miniaturisierung mit Parallel- und Reihen-Schaltung, denn ein relativ dünnes Gas (mittlere freie Weglänge $<$ Kammer-Abmessungen) kann man nicht nur durch Verringerung der Gas-Dichte sondern auch durch Verkleinerung der Gas-Kammer erreichen und man kann viele Gas-Kammern nebeneinander und aufeinander stapeln um so die Temperatur-Differenz und Leistung zu erhöhen.

Anzumerken bleibt zum Schluß noch, dass es auch andere Konstruktionen gibt, die mit langreichweitigen Wechselwirkungen wie der Schwerkraft Umgebungswärme in andere Energieformen oder Temperaturdifferenzen umsetzen können.

Ein Beispiel hierfür ist ein isoliertes vertikales Metall-Kabel in einem Plasma, beispielsweise ein Kabel aus ThO_2 -isoliertem Wolfram in Cs-Plasma bei 2000 bis 3000 K: Durch die Schwerkraft werden die frei beweglichen Elektronen im Metall nach unten gezogen mit der Kraft $m_e \cdot g$. Im stationären Gleichgewicht, ohne Strom, entsteht hierdurch ein entgegengesetztes elektrisches Feld der Stärke E_g ,

das die Elektronen im Metall in der Schwebe hält, d. h. $m_e \cdot g = E_g \cdot q_e$.

Durch Messung dieses Feldes, an beschleunigten Leitern, bestimmten unter anderem C. R. Tolman und T. D. Steward 1916 die Elektronenmasse [Ber-71].

Ein solches Feld kann nicht im Plasma entstehen, da ein elektrisches Feld durch die freie Beweglichkeit sowohl der negativen als auch der positiven Ionen sofort abgebaut wird.

Ist nun das Metall-Kabel im Plasma an den Enden nicht isoliert, so bewirkt das elektrische Feld im Kabel einen Elektronen-Strom vom unteren Kabel-Ende durch das Plasma zum oberen Kabel-Ende. Der Strom dieses geschlossenen Stromkreises kann vom Kabel abgegriffen werden und, wie jeder andere Strom, einen elektrischen Verbraucher versorgen.

Allerdings ist dies technisch nur schwer machbar, da durch die Schwerkraft auf der Erdoberfläche in Metallen eine Feldstärke von nur $E_g = g \cdot m_e/q_e = 55,8 \text{ pV/m}$ erzeugt wird.

Selbst viele solcher Spannungsquellen in Reihe zu schalten wäre kein Ausweg, da durch die niedrige Feldstärke sehr großen Leitungslängen und damit auch ein hoher Innenwiderstand nötig ist. Durch den hohen Innenwiderstand können aber nur sehr kleine elektrische Leistungen erreicht werden.

Literatur

- [Ber-71] Bergmann-Schaefer: **Lehrbuch der Experimentalphysik**, Band II, 6. Auflage, 1971, S. 483-484.
- [Ber-74] Bergmann-Schaefer: **Lehrbuch der Experimentalphysik**, Band I, 9. Auflage, 1974, S. 653.
- [Ber-78] Bergmann-Schaefer: **Lehrbuch der Experimentalphysik**, Band III, 7. Auflage, 1978, S. 962.
- [Brenig-92] Brenig, Wilhelm: **Statistische Theorie der Wärme, Bd. 1: Gleichgewichtsphänomene**, Berlin, New York, 3. Aufl., 1992.
- [Carmesin-96] Carmesin, Hans-Otto: **Grundlagen zur Relativitätstheorie**, Berlin, 1996, S. 59.
- [Duschek-65] Duschek, Adalbert; Hochrainer, August: **Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung**, Wien, New York, 2. Aufl., III. Teil, 1965, Seite 271.
- [Heise-63] Heise, Ruth: **Elementare Einführung in die kinetische Gastheorie**, Leipzig, 1963.
- [Hur-57] Hurlbut, F. C.: **Studies of Molecular Scattering at the Solid Surface**, Journal of Applied Physics, Volume 28, Number 8, 1957, page 844 f..
- [Jackson-82] Jackson, John David: **Klassische Elektrodynamik**, Berlin, New York, 2. Aufl., 1982, Seite 266.
- [Kohlrausch-86] Kohlrausch, Friedrich: **Praktische Physik**, Band 3, Stuttgart, 1986, S. 105.
- [Kuch-89] Kuchling, Horst: **Taschenbuch der Physik**, Frankfurt/Main, 1989, 12. Auflage, S. 252.
- [Miller-55] R. C. Miller and P. Kusch: **Velocity Distributions in Pottasium and Thallium Atomic Beams**, Physical Review, Volume 99, Number 4, 1955, Page 1314-1321.
- [Lüth-93] Lüth, H.: **Surfaces and Interfaces of Solids**, 2nd Edition 1993, ISBN 3-540-56840-9, page 251.
- [Messiah-91] Messiah, Albert: **Quantenmechanik**, Band 1, Berlin, New York, 2. Aufl., 1991, Seite 352.

- [Reif-87] Reif, Frederick: **Statistische Physik und Theorie der Wärme**, Berlin, New York, 3. Aufl., 1987, S. 322.
- [Stephani-91] Stephani, Hans: **Allgemeine Relativitätstheorie**, Berlin, 1991, S. 18.